

Практическое занятие №3.
НАХОЖДЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ, ДИСПЕРСИИ И СКО
НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Цель занятия. Уметь рассчитывать интервальные оценки числовых характеристик и параметров генеральной совокупности в MS Excel.

Учебные вопросы:

1. Доверительный интервал для математического ожидания при известном СКО.
2. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном СКО. Отыскание доверительной вероятности и объема репрезентативности.
3. Доверительный интервал для дисперсии и СКО.
4. Определение доверительной вероятности и объема репрезентативности.

В MS Excel для определения границ доверительного интервала для средней арифметической генеральной совокупности можно использовать кроме инструмента «Описательная статистика» функции ДОВЕРИТ (оставлена в новых версиях Excel для совместимости с более ранними), ДОВЕРИТ.НОРМ, ДОВЕРИТ.СТЬЮДЕНТ.

Синтаксис функции: =ДОВЕРИТ(альфа;станд_откл;размер). Она содержит параметры:

альфа – уровень значимости, применяемый для вычисления доверительной вероятности (надежности). Доверительная вероятность $\beta = 1 - \alpha$ или в процентах $\beta = (1 - \alpha) \cdot 100 \%$. Таким образом, значение альфа, равное 0,05, означает 95 %-й уровень доверительной вероятности;

станд_откл – известное стандартное (среднее квадратическое) отклонение генеральной совокупности для интервала данных;

размер – это количество наблюдений в выборке.

Функции ДОВЕРИТ.НОРМ и ДОВЕРИТ.СТЬЮДЕНТ имеют такой же синтаксис, как и функция ДОВЕРИТ.

Вычисление величины $\delta = u_{\beta/2} \cdot \sigma_x / \sqrt{n}$ в формуле (1.34) определения доверительного интервала для математического ожидания $(\bar{X} - u_{\beta/2} \cdot \sigma_x / \sqrt{n}; \bar{X} + u_{\beta/2} \cdot \sigma_x / \sqrt{n})$ осуществляется с помощью функции ДОВЕРИТ (ДОВЕРИТ.НОРМ).

Вычисление величины $u_{\beta/2}$, входящей в доверительный интервал, осуществляется с помощью функции НОРМСТОБР (в новых версиях НОРМ.СТ.ОБР): $u_{\beta/2} = \text{НОРМСТОБР}((\beta + 1)/2)$, =

Вычисление величины $\delta = t_{n-1, \beta} \frac{S_x}{\sqrt{n-1}}$ в формуле (1.35) для определения доверительного интервала $(\bar{X} - t_{n-1, \beta} \frac{S_x}{\sqrt{n-1}}; \bar{X} + t_{n-1, \beta} \frac{S_x}{\sqrt{n-1}})$ осуществляется с

помощью функции ДОВЕРИТ.СТЬЮДЕНТ, а вычисление величины $t_{n-1,\beta}$, входящей в доверительный интервал, – с помощью статистической функции Excel =СТЬЮДЕНТ.ОБР(вероятность,степени_свободы).

Пример 1

По выборке объема $n = 9$ получено среднее значение $\bar{X} = 1,5$. Считая, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону с $\sigma = 2$, определить интервальную оценку для математического ожидания с надежностью $\beta = 0,95$.

Решение.

Используя функцию Excel =НОРМСТОБР((1+0,95)/2), находим, что $u_{\beta/2} = 1,959963$. Тогда $\delta = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}} = 1,31$, доверительный интервал имеет границы $(\bar{X} - 1,31; \bar{X} + 1,31) = (0,19, 1,81)$. Таким образом, с вероятностью 0,95 можно быть уверенным в том, что интервал (0,19, 1,81) накроет параметр распределения (математическое ожидание) или, другими словами, с вероятностью 0,95 значение \bar{X} дает значение параметра распределения с точностью $\delta = 1,31$.

Пример 2

Найти границы 95 %-го доверительного интервала для среднего времени подготовки к экзамену, если у 25 студентов группы оно составило 70 мин, а стандартное отклонение равно 10 мин.

Решение.

Установить табличный курсор в ячейку A2. Для определения границ доверительного интервала необходимо на панели инструментов **Стандартная** нажать кнопку **Вставка функции** (f_x). В появившемся диалоговом окне **Мастер функций** выбрать категорию **Статистические** и функцию ДОВЕРИТ, после чего нажать кнопку **ОК**. В рабочие поля появившегося диалогового окна ДОВЕРИТ с клавиатуры ввести: альфа – 0,05, станд_откл – 10, размер – 25. Нажать кнопку **ОК**. В ячейке A2 появится значение половины 95 %-го доверительного интервала для среднего значения выборки, равное 3,92.

Таким образом, в 95 % случаев можно ожидать, что средняя продолжительность подготовки к экзамену составляет от 70 – 3,92 до 70 + 3,92 мин или приблизительно от 66 до 74 мин.

Пример 3

Имеется 10 наблюдений времени ожидания междугороднего автобуса на остановке: 51, 49, 50, 48, 49, 47, 52, 51, 5, 56.

Определить среднее время ожидания, оценить разброс значений относительно среднего, 95 %-й доверительный интервал для среднего значения (с использованием функций ДОВЕРИТ и ДОВЕРИТ.СТЬЮДЕНТ) и выявить нехарактерные для выборки варианты.

Решение.

1. В диапазон A2:A11 введите исходный ряд чисел.
2. В ячейке A12 среднее значение =СРЗНАЧ(A2:A11) равно 45,8, а в ячейке A13 =СТАНДОТКЛОН.В(A2:A11) – 13,80.
3. Значение функции =ДОВЕРИТ(0,05;A13;10) доверительного интервала при надежности 0,95 составляет 8,56 (в ячейке A14). Получается, что левая граница доверительного интервала – $45,8 - 8,56 = 37,24$, правая граница – $45,8 + 8,56 = 54,36$.
4. Значение функции =ДОВЕРИТ.СТЪЮДЕНТ(0,05;A13;10) доверительного интервала при надежности 0,95 составляет 9,88 (в ячейке A15). Таким образом, левая граница доверительного интервала – $45,8 - 9,88 = 35,92$, правая граница – $45,8 + 9,88 = 56,68$. Следовательно, доверительный интервал, полученный с помощью функции ДОВЕРИТ.СТЪЮДЕНТ, шире, чем рассчитанный с помощью функции ДОВЕРИТ (ДОВЕРИТ.НОРМ).
5. Для выявления нетиповых для выборки вариантов нужно полученный в пункте 3 доверительный интервал умножить на \sqrt{n} (в Excel – =A14*КОРЕНЬ(СЧЕТ(A2:A11))). Получим 27,06. Левая граница увеличенного интервала будет $45,8 - 27,06 = 18,74$, а правая – $45,8 + 27,06 = 72,86$.

Пример 4

Построить доверительный интервал для средней арифметической нормально распределенной случайной величины при $n = 20$, $\beta = 0,95$ и неизвестном СКО, если генеральная совокупность представлена выборкой:

4, 13, 12, 7, 8, 8, 9, 10, 5, 8, 7, 10, 15, 25, 4, 9, 16, 14, 9, 2.

Решение.

1. В диапазон A1:A20 введите исходный ряд чисел.
2. В ячейке A21 среднее значение =СРЗНАЧ(A1:A20) равно 9,75, а в ячейке A22 СКО =СТАНДОТКЛОН.В(A1:A20) – 5,17.
3. Значение функции =ДОВЕРИТ.СТЪЮДЕНТ(0,05; A22; 20) доверительного интервала при надежности 0,95 составляет 2,42 (в ячейке A23). Таким образом, левая граница доверительного интервала $9,75 - 2,42 = 7,33$, правая – $9,75 + 2,42 = 12,17$. Доверительный интервал для среднего значения составляет (7,33; 12,17).

Задание 1

Построение доверительных интервалов для дисперсии и случайного квадратического отклонения нормально распределенных случайных величин

В MS Excel для определения границ доверительного интервала для дисперсии и СКО генеральной совокупности можно использовать функции: 1) ХИ2.ОБР, которая возвращает значение, обратное левосторонней вероятности распределения хи-квадрат ; 2) функцию ХИ2.ОБР.ПХ, которая возвращает значение, обратное правосторонней вероятности распределения хи-квадрата.

Синтаксис функций: =ХИ2.ОБР(вероятность;степени_свободы);
=ХИ2.ОБР.ПХ(вероятность;степени_свободы).

Пример 5

Построить доверительный интервал для дисперсии и СКО данных предыдущего примера при известном математическом ожидании генеральной совокупности $M_x = 10$. Для решения задачи использовать приложение 3 и ХИ2.ОБР. Сравнить полученные результаты.

Решение.

$\chi^2_{19; 0,05} = 30,1$; $\chi^2_{19; 0,95} = 10,1$ (см. прилож. 3);
(в Excel =ХИ2.ОБР.ПХ(0,05;19) =30,14; =ХИ2.ОБР.ПХ(0,05;19) = 10,12).

$$D' = \frac{1}{20} [(2-10)^2 + 2(4-10)^2 + (5-10)^2 + 2(7-10)^2 + 3(8-10)^2 + 3(9-10)^2 + \\ + 2(10-10)^2 + (12-10)^2 + (13-10)^2 + (14-10)^2 + (15-10)^2 + (16-10)^2 + (25-10)^2] = 25,45.$$

Значение выборочной дисперсии, полученной в Excel, =ДИСП.В(А1:А20) =26,72368. Значение генеральной дисперсии =ДИСП.В(А1:А20) =25,39, что существенно ближе к рассчитанной дисперсии. Разница объясняется отличием среднего значения, полученного по генеральной совокупности, от выборочного среднего значения.

Доверительный интервал для дисперсии $D_x = \sigma_x$ при неизвестном M_x определяется неравенствами;

$$D' \cdot n / \chi^2_{n-1, (1+\beta)/2} < \sigma_x^2 < D' \cdot n / \chi^2_{n-1, (1-\beta)/2}$$

Поэтому:

$$\frac{nD'}{\chi^2_{19; 0,05}} = \frac{20 \cdot 25,45}{30,1} = 16,9; \quad \frac{nD'}{\chi^2_{19; 0,95}} = \frac{20 \cdot 25,45}{10,1} = 50,4;$$

$$P(16,9 < \sigma_x^2 < 50,4) = 0,95; \quad 16,9 < \sigma_x^2 < 50,4; \quad 4,11 < \sigma_x < 7,1.$$

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО ТЕМЕ
«ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ»**

Задание 1.

Найти доверительный интервал для математического ожидания при:

- а) $\sigma_x=3$; $\bar{x} = 10$; $n=30$; $\beta=0,95$;
б) $S_x=6$; $\bar{x} = 12$; $n=15$; $\beta=0,95$; $N=900$.

Задание 2.

В районе 2000 семей. С целью определения среднего размера семьи района было проведено 3% - ное выборочное обследование семьи методом случайного бесповторного отбора. В результате обследования получены данные:

| | | | | | | | | | |
|--------------------|---|---|----|----|---|---|---|---|---|
| Размер семьи, чел. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Число семей | 4 | 8 | 14 | 16 | 8 | 4 | 3 | 2 | 1 |

С вероятностью 0,99 определить пределы, в которых находится средний размер семьи в районе.

Задание 3.

Найти минимальный объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,975 ширина доверительного интервала для математического ожидания равна:

- а) 0,5 при $\sigma_x=1,5$; б) 0,6 при $S_x=1$; в) 1 при $\sigma_x=1,5$; $N=500$.

Задание 4.

Найти доверительный интервал для дисперсии и СКО правового показателя X (в усл.един), если:

- а) $n = 50$; $S_x = 2,2$; $\beta = 0,9$; б) $n = 70$; $S_x^2 = 9$; $\beta = 0,99$;

- в)

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|----|----|----|----|---|----|
| x_i | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| n_i | 6 | 8 | 12 | 18 | 20 | 16 | 9 | 11 |

 $\beta = 0,95$.

Задание 5.

Найти доверительную вероятность при оценке математического ожидания нормально распределенной случайной величины X , если:

$$\sigma_x=3; \bar{X} = 10,2; n=16; \delta = 1,2;$$

Задание 6.

Найти доверительный интервал для математического ожидания при:

- а) $\sigma_x=3$; $\bar{x} = 10$; $n=30$; $\beta=0,95$;
б) $S_x=6$; $\bar{x} = 12$; $n=15$; $\beta=0,95$; $N=900$.

Задание 7.

Найти минимальный объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,975 ширина доверительного интервала для математического ожидания равна:

а) 0,5 при $\sigma_x=1,5$; б) 0,6 при $S_x=1$; в) 1 при $\sigma_x=1,5$; $N=500$.

Задание 8.

Для определения среднего размера вклада определенной категории вкладчиков в сберегательных кассах города, где число вкладчиков 5000, необходимо провести выборку лицевых счетов. Предварительно установлено, что среднее квартальное отклонение размеров вкладов составляет 120 рублей. Определить необходимую численность выборки при условии, что с вероятностью 0,95 ошибка выборочной средней не превысит 10 рублей.

Задание 9.

С целью определения среднего диаметра деревьев необходимо провести выборочное обследование деревьев. Какова должна быть численность выборки, чтобы с вероятностью 0,95 ошибка выборочной средней не превосходила 15 см при среднем квадратичном отклонении 25 см.

Задание 10.

На овцеводческой ферме из стада произведена выборка для взвешивания 36 овец. Их средний вес оказался равным 50 кг. Предположив распределение веса нормальным, и, определив несмещенную оценку выборочной дисперсии - 16, найти доверительный интервал для оценки математического ожидания с надежностью 0,9.

Задание 11.

В нескольких мелких магазинах проведена проверка качества 100 изделий, после чего осуществлена обработка полученных данных. В результате получено значение выборочного среднего квадратичного отклонения (4). Считая распределение качественных изделий нормальным, найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для оценки среднего квадратичного отклонения.

Задание 12.

Среди 250 деталей, изготовленных станком-автоматом, оказалось 32 нестандартных. Найти доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,99 неизвестную вероятность изготовления станком нестандартной детали.

Задание 13.

Проводится 10 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем «исправленное» среднее квадратическое отклонение случайных ошибок измерений оказалось равным 0,8. Найти точность прибора с надежностью 0,95. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Задание 14.

С целью определения качества пряжи на прядильной фабрике предполагается провести выборочное обследование пряжи. Какова должна быть численность выборки, чтобы с вероятностью 0,954 ошибка выборочной средней не превышала 4 г при среднем квадратическом отклонении 20 г.

Задание 15.

На заводе, где работают 10 тыс. рабочих, необходимо определить их стаж работы. Предварительным обследованием установлено, что среднее квадратическое отклонение стажа работы равно 5 годам. Определить необходимую численность выборки при условии, что с вероятностью 0,97 ошибка выборочной средней не превысит 1 года.

Задание 16.

В городе А с целью определения средней продолжительности поездки населения на работу предполагается провести выборочное обследование. Какова должна быть численность выборки, чтобы с вероятностью 0,98 ошибка выборочной средней не превышала 5 мин при среднем квадратическом отклонении 20 мин?

Контрольная работа 1

по теме: «Способы представления экспериментальных данных и оценка числовых характеристик распределений».

1. Для данной выборки построить полигон, гистограмму и эмпирическую функцию расширения.

2. Сделать точечную и интервальную оценку математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения данной СВ для $\beta = 0,95$.

| Варианты | Выборки | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 3 | 4 | 4 | 10 | 9 | 17 | 21 | 5 | 10 | 6 | 7 | 4 | 8 | 12 | 14 | 16 |
| | 3 | 9 | 8 | 19 | 5 | 4 | 5 | 11 | 7 | 4 | 8 | 5 | 6 | 5 | 4 | 5 |
| 2 | 7 | 3 | 4 | 6 | 6 | 7 | 10 | 11 | 10 | 11 | 12 | 13 | 10 | 11 | 12 | 9 |
| | 13 | 14 | 12 | 14 | 16 | 9 | 11 | 18 | 22 | 20 | 11 | 11 | 14 | 13 | 10 | 8 |
| 3 | 8 | 7 | 8 | 8 | 7 | 9 | 9 | 9 | 7 | 7 | 7 | 10 | 8 | 8 | 9 | 8 |
| | 8 | 7 | 7 | 7 | 3 | 9 | 10 | 10 | 8 | 8 | 7 | 7 | 8 | 8 | 7 | 8 |
| 4 | 1 | 1 | 4 | 5 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 7 | 8 | 4 | 5 | 3 |
| | 1 | 10 | 14 | 16 | 2 | 3 | 5 | 17 | 10 | 12 | 10 | 19 | 20 | 24 | 1 | 25 |
| 5 | 14 | 1 | 3 | 5 | 5 | 7 | 8 | 9 | 8 | 28 | 12 | 14 | 12 | 11 | 10 | 9 |
| | 12 | 16 | 25 | 23 | 16 | 17 | 20 | 22 | 17 | 17 | 16 | 20 | 26 | 27 | 25 | 14 |
| 6 | 15 | 5 | 25 | 7 | 8 | 9 | 12 | 14 | 23 | 20 | 12 | 14 | 14 | 16 | 14 | 16 |
| | 13 | 9 | 19 | 20 | 18 | 18 | 10 | 14 | 14 | 13 | 17 | 21 | 24 | 21 | 17 | 12 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 7 | 2 | 1 | 30 | 28 | 2 | 2 | 1 | 1 | 14 | 18 | 20 | 25 | 27 | 3 | 3 | 5 |
| | 1 | 10 | 10 | 9 | 8 | 9 | 7 | 7 | 6 | 5 | 5 | 6 | 12 | 13 | 16 | 22 |
| 8 | 6 | 4 | 6 | 5 | 6 | 6 | 7 | 5 | 5 | 5 | 6 | 4 | 6 | 6 | 5 | 5 |
| | 6 | 4 | 6 | 5 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 |
| 9 | 10 | 1 | 21 | 2 | 20 | 4 | 5 | 5 | 6 | 10 | 10 | 11 | 10 | 10 | 12 | 13 |
| | 1 | 12 | 11 | 19 | 18 | 16 | 15 | 15 | 12 | 9 | 9 | 11 | 12 | 11 | 11 | 10 |
| 10 | 10 | 7 | 8 | 15 | 16 | 15 | 16 | 14 | 15 | 14 | 16 | 17 | 17 | 19 | 20 | 10 |
| | 26 | 20 | 22 | 22 | 22 | 25 | 26 | 25 | 26 | 27 | 28 | 20 | 18 | 29 | 30 | 31 |
| 11 | 1 | 2 | 7 | 1 | 1 | 14 | 16 | 21 | 23 | 25 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 8 |
| | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 8 | 10 | 12 | 6 | 6 | 7 | 8 | 18 | 20 | 2 | 1 |
| 12 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 8 | 9 | 9 | 12 | 12 | 12 | 12 | 14 | 16 | 9 | 21 |
| | 24 | 22 | 21 | 18 | 12 | 14 | 13 | 12 | 13 | 14 | 16 | 16 | 18 | 20 | 10 | 11 |
| 13 | 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 3 | 3 | 5 | 4 | 6 | 3 | 3 | 4 |
| | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 14 | 1 | 17 | 21 | 5 | 5 | 4 | 3 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 | 12 | 10 | 11 |
| | 14 | 16 | 14 | 13 | 9 | 10 | 9 | 9 | 7 | 8 | 2 | 18 | 20 | 19 | 18 | 3 |
| 15 | 9 | 7 | 10 | 14 | 15 | 17 | 17 | 20 | 21 | 19 | 20 | 21 | 20 | 20 | 22 | 6 |
| | 9 | 24 | 24 | 28 | 35 | 30 | 30 | 40 | 39 | 38 | 34 | 34 | 24 | 19 | 19 | 20 |
| 16 | -7 | -8 | -4 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 11 |
| | 15 | 13 | 12 | 10 | 7 | 8 | 7 | 8 | 6 | 6 | 9 | 6 | 7 | 8 | 4 | 4 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 17 | 3 | 4 | 5 | 5 | 3 | 3 | 6 | 2 | 2 | 4 | 4 | 2 | 6 | 3 | 5 | 1 |
| | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 | 7 | 1 | 4 | 5 | 3 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 |
| 18 | 1 | 1 | 10 | 9 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 |
| | 7 | 5 | 7 | 8 | 8 | 5 | 7 | 9 | 9 | 12 | 14 | 13 | 21 | 18 | 16 | 13 |
| 19 | -10 | -8 | -4 | -2 | 1 | 2 | 1 | 4 | 4 | 3 | 5 | 4 | 5 | 4 | 6 | 4 |
| | 7 | 7 | 8 | 7 | 8 | 14 | 14 | 8 | 7 | 16 | 20 | 8 | 26 | 24 | 16 | 20 |
| 20 | 8 | 9 | 8 | 9 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 9 | 9 | 8 | 9 |
| | 4 | 4 | 3 | 8 | 8 | 9 | 3 | 8 | 8 | 9 | 9 | 3 | 4 | 4 | 3 | 9 |
| 21 | 1 | 21 | 1 | 1 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 4 |
| | 8 | 8 | 9 | 8 | 8 | 9 | 11 | 10 | 11 | 15 | 15 | 18 | 18 | 15 | 19 | 10 |
| 22 | -15 | -12 | -10 | -7 | -6 | -6 | 0 | 4 | -4 | -2 | 2 | 2 | 3 | 3 | -2 | -4 |
| | 1 | 1 | -1 | -2 | 3 | 3 | 8 | 9 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 0 | 0 | 0 |
| 23 | 7 | 8 | 6 | 6 | 7 | 8 | 6 | 5 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 4 | 8 | 5 |
| | 7 | 6 | 8 | 4 | 4 | 6 | 5 | 8 | 7 | 7 | 6 | 6 | 4 | 8 | 5 | 6 |
| 24 | 7 | 14 | 7 | 14 | 10 | 10 | 9 | 9 | 10 | 10 | 12 | 12 | 10 | 9 | 6 | 5 |
| | 16 | 17 | 16 | 4 | 4 | 3 | 2 | 17 | 19 | 20 | 11 | 10 | 9 | 10 | 6 | 4 |
| 25 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 35 | 30 | 21 | 14 | 6 |
| | 7 | 9 | 11 | 3 | 4 | 5 | 4 | 7 | 7 | 8 | 14 | 14 | 18 | 20 | 20 | 25 |